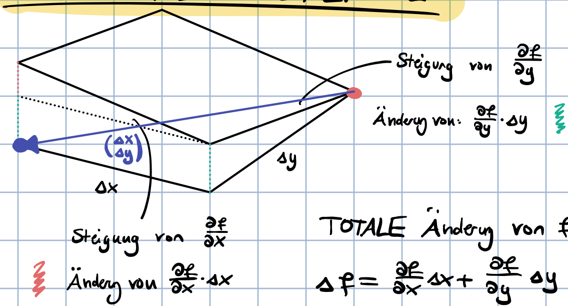
Heute:
- Totales Differential (4.2) $\rightsquigarrow$ Kettenregel
- Tangentialebene (4.3)
- Wiederholung Richtungsableitungen (4.5)

Nach der Stunde: Feedback ausfüllen!

26 11

DAS TOTALE DIFFERENTIAL



TOTALE Änderung von f ist:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Wenn $\Delta x, \Delta y \longrightarrow 0$, also sehr klein, dann schreibt man anstatt Δ einfach d. Also:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} \cancel{\Leftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Das ist das totale Differential.

Diese lokale lineare Approximation nennt man Tangentialebene.

Die Funktionsgleichung lautet:

$$z = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\text{Steigung in } x}\cdot \overbrace{(x-x_0)}^{\text{Bewegung in } x \text{ von } x_0 \text{ aus}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{Steigung in } y}\cdot \overbrace{(y-y_0)}^{\text{Bewegung in } y \text{ von } y_0 \text{ aus}} + f(x_0,y_0)$$

Koordinatenform

Beispiel 4.11 (Änderung durch totales Differential berechnen)
Wir suchen das totale Differential von der Funktion $f(x,y) = x^2y + y^2$. Dafür berechnen wir einfach die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f = 2xy \qquad \partial_y f = x^2 + 2y.$$

Damit folgt für das totale Differential:

$$df = 2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy.$$

Damit können wir jetzt abschätzen, wie sich der Funktionswert ungefähr ändern wird, wenn wir einen kleinen Schritt (dx, dy) von einer Stelle (x_0, y_0) bewegen. Wir fragen uns jetzt zum Beispiel, wie sehr sich der Funktionswert verändert, wenn wir von der Stelle $(1,2)$ um $(0.1, 0.05)$ uns bewegen. Wir berechnen somit einfach:

$$df = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 0.1 + (1^2 + 2\cdot 2)\cdot 0.05 = 0.65.$$

Also ändert sich der Funktionswert um ungefähr 0.65, wenn wir von $(1,2)$ uns um $(0.1, 0.05)$ bewegen, also zu der Stelle $(1.1, 2.05)$ gehen. Das ist eine Näherung erster Ordnung!

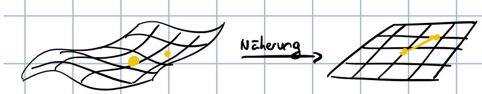
Wir können auch die exakte Änderung ausrechnen. Diese wäre einfach

$$f(1.1, 2.05) - f(1,2) = 0.683.$$

Wir sehen also, dass für kleine Schritte/Änderungen (dx, dy) ist die lokale lineare Näherung durch das totale Differential sehr genau! Das ist im Grunde die Taylorapproximation erster Ordnung, wie wir später sehen werden.

Aufgabe [2024 S]
Gegeben ist die folgende Funktion $f(x,y)$ in zwei Variablen $f(x,y) = \sin(xy)$. Welche ungefähre Veränderung der Funktionswerte erwarten Sie, wenn Sie die Argumente von $(x_0, y_0) = (1,0)$ zu $(x,y) = (1.1, -0.1)$ verändern?

Es handelt sich um eine lineare Näherung (Tangentialebene)



Lösung: $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$

$$df = 0\cdot dx + 1\cdot dy = 0\cdot 0.1 + 1\cdot(-0.1) = -0.1.$$

Beispiel 4.12 (Tangentialebene aufstellen)
Sei $f(x,y) = x^2 + y^2$. Wir suchen die Tangentialebene an der Stelle $(1,1)$.
Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

An der Stelle $(1,1)$ gilt: $f(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$.
Die Tangentialebene ist:

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2x + 2y - 2.$$

Totales Differential und die Kettenregel.

Sei $f(x,y,t)$. Dann ist:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

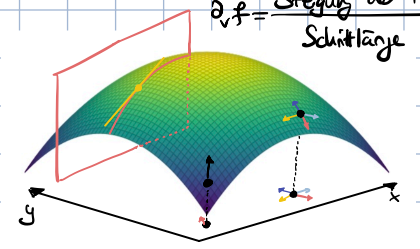
„Teilen“ wir jetzt durch dt so erhalten wir

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Das ist genau die Kettenregel...

Wiederholung: Richtungsableitung

$$\partial_v f = \frac{\text{Steigung der Pfeile}}{\text{Schrittlänge}}$$



$$\boxed{\partial_v f(x_0,y_0) = \frac{1}{\|v\|}\langle \nabla f(x_0,y_0), v\rangle}$$

Beispiel 4.20 (Richtungsableitung berechnen)
Wir suchen die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$$

im Punkt (π,π) in Richtung $\vec{v} = (-1,-3)$.

Zunächst berechnen wir den Gradienten von $f(x,y)$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{bmatrix}.$$

Einsetzen des Punktes (π,π):

$$\nabla f(\pi,\pi) \begin{bmatrix} -\sin(\pi)\sin(\pi) \\ \cos(\pi)\cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der gegebene Richtungsvektor ist $\vec{v} = (-1,-3)$. Dessen Länge beträgt

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Damit ist die Richtungsableitung:

$$\partial_{\vec{v}} f(\pi,\pi) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{0\cdot(-1) + 1\cdot(-3)}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Aufgabe [2024 S] Gegeben ist die folgende Funktion in zwei Variablen

$$f(x,y) = \ln(x^2) + xy^2 - 3y \quad (x \neq 0),$$

welche wir insbesondere an der Stelle $(1,1)$ betrachten.
Ausserdem ist die Richtung $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ gegeben.
Wie gross ist die momentane Veränderung in Richtung dieses Vektors $\vec{v}$ an der betrachteten Stelle?

Lösung:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} + y^2 \\ 2xy - 3 \end{pmatrix} \rightarrow \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\|v\| = \sqrt{9+16} = 5.$ $\quad \partial_v f(1,1) = \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} [illegible] \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [illegible] \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{[illegible]}{5} = -1.$
